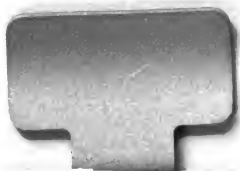
SOLUZIONI DI PROBLEMI ARITMETICI RACCOLTI PER CURA DI G. GONDOLO

G. Gondolo

SOLUZIONI

DI

PROBLEMI ARITMETICI

RACCOLTI

PER CURA

DI G. GONDOLO

ACQUI, 1870

TIP. SOCIALE, DIRETTA DA RAGGI

ESERCIZI SULLE QUATTRO OPERAZIONI FONDAMENTALI
DELL'ARITMETICA

ADDIZIONE +					SOTTRAZIONE —					MOLTIPLICAZIONE ×					DIVISIONE :				
1	più	1	eguale	2	2	meno	1	eguale	1	1	moltiplicato	1	eguale	1	1	diviso	1	eguale	1
2	+	1	=	3	3		1	=	2	2	×	1	=	2	2	:	1	=	2
3		1		4	4		1		3	3		1		3	3		1		3
4		1		5	5		1		4	4		1		4	4		1		4
5		1		6	6		1		5	5		1		5	5		1		5
6		1		7	7		1		6	6		1		6	6		1		6
7		1		8	8		1		7	7		1		7	7		1		7
8		1		9	9		1		8	8		1		8	8		1		8
9		1		10	10		1		9	9		1		9	9		1		9
2	+	2	=	4	4	—	2	=	2	2	×	2	=	4	4	:	2	=	2
3		2		5	5		2		3	3		2		6	6		2		3
4		2		6	6		2		4	4		2		8	8		2		4
5		2		7	7		2		5	5		2		10	10		2		5
6		2		8	8		2		6	6		2		12	12		2		6
7		2		9	9		2		7	7		2		14	14		2		7
8		2		10	10		2		8	8		2		16	16		2		8
9		2		11	11		2		9	9		2		18	18		2		9
3	+	3	=	6	6	—	3	=	3	3	×	3	=	9	9	:	3	=	3
4		3		7	7		3		4	4		3		12	12		3		4
5		3		8	8		3		5	5		3		15	15		3		5
6		3		9	9		3		6	6		3		18	18		3		6
7		3		10	10		3		7	7		3		21	21		3		7
8		3		11	11		3		8	8		3		24	24		3		8
9		3		12	12		3		9	9		3		27	27		3		9
4	+	4	=	8	8	—	4	=	4	4	×	4	=	16	16	:	4	=	4
5		4		9	9		4		5	5		4		20	20		4		5
6		4		10	10		4		6	6		4		24	24		4		6
7		4		11	11		4		7	7		4		28	28		4		7
8		4		12	12		4		8	8		4		32	32		4		8
9		4		13	13		4		9	9		4		36	36		4		9
5	+	5	=	10	10	—	5	=	5	5	×	5	=	25	25	:	5	=	5
6		5		11	11		5		6	6		5		30	30		5		6
7		5		12	12		5		7	7		5		35	35		5		7
8		5		13	13		5		8	8		5		40	40		5		8
9		5		14	14		5		9	9		5		45	45		5		9
6	+	6	=	12	12		6	=	6	6	×	6	=	36	36	:	6	=	6
7		6		13	13		6		7	7		6		42	42		6		7
8		6		14	14		6		8	8		6		48	48		6		8
9		6		15	15		6		9	9		6		54	54		6		9
7	+	7	=	14	14	—	7	=	7	7	×	7	=	49	49	:	7	=	7
8		7		15	15		7		8	8		7		56	56		7		8
9		7		16	16		7		9	9		7		63	63		7		9
8	+	8	=	16	16	—	8	=	8	8	×	8	=	64	64	:	8	=	8
9		8		17	17		8		9	9		8		72	72		8		9
9	+	9	=	18	18	—	9	=	9	9	×	9	=	81	81	:	9	=	9
10		9		19	19		9		10	10		9		90	90		9		10
10	+	10	=	20	20		10	=	10	10	×	10	=	100	100	:	10	=	10

SOLUZIONI

DI

PROBLEMI ARITMETICI

RACCOLTI

PER CURA

DI G. GONDOLO

ACQUI, 1870

TIP. SOCIALE, DIRETTA DA RAGGI.

PREFAZIONE

o

DEDICA

AI GENITORI, E PRINCIPALMENTE A QUELLI FRA I MIEI CONCITTADINI, CHE BRAMANO ACCERTARSI DE'PROGRESSI FATTI DAI FIGLI, SIA NEL CALCOLO CHE NELLA RAGIONE

Nel por mano all'educazione di mio figlio, incominciando, come fa ognuno, dall'alfabeto, il mio pensiero corse tosto a moltissime cose, soffermandosi sulla stragrande quantità di libri che viene pubblicata, e sul ristrettissimo numero di coloro i quali posseggono le qualità richieste per rendersi famigliari colle cifre; essendochè, dopo apprese le regole aritmetiche, convenga conoscerne l'applicazione.

La esperienza mi ha dimostrato come taluni giovani, maestri appieno della teoria del calcolo, siano, nullameno, non di rado impacciati nel risolvere quistioni semplicissime.

Nel raccogliere in questo trattatello le soluzioni sparse in parecchi miei logori quaderni, ho avuto per iscopo di applicare ad un dato numero di questioni, i principii fondamentali dell'Aritmetica.

Un altro utile potrassene ricavare: quello di sviluppare il criterio delle menti giovanili, assuefandole ad un continuo esercizio, mercè il quale potranno, con assai maggiore facilità, passare allo studio dell'Algebra e della Geometria.

In ogni modo mi sia lecito sperare, che i miei Concittadini vorranno sapermi grado del mio buon volere.

(9 *agosto* 1870).

G. Gondolo.

9	8	3	2	4	6	5	9	4	3	6	8	7	2	3	9	8	3	5	4
Decine di quintilioni	Quintilioni	Centinaja "	Decine di quatrilioni	Quatrilioni	Centinaja "	Decine di trilioni	Trilioni	Centinaja "	Decina di bilioni	Bilioni	Centinaja "	Decine di milioni	Milioni	Centinaja "	Decine di migliaja	Migliaja	Centinaja	Decine	Unità

Ecco alcuni nomi da scriversi colle cifre:

1.° Cinque milioni, ventimila e quattro.
2.° Sessantamila e cento.
3.° Quaranta bilioni, settemila e dieci.
4.° Cento e un milione e dicianove.
5.° Trenta trilioni, ottanta milioni e settanta.
6.° Dodici quattrilioni, duecento trenta milioni, cento quindici mila e cento dodici.
7.° Due quintilioni, sessanta milioni e diciotto.
8.° Otto sestilioni, dodici trilioni, duecento due mila e undici, ecc.

Ecco alcuni quesiti da sciogliere:

Come enunciate i numeri: 40,404 — 2,407,117 — 40,001,111,120,074 e 3,893,200,700,745,600?
Quante decine vi sono in trentadue mila?
Quante centinaja in sette milioni e quattromila?
Quante decine di migliaja in sessanta bilioni e tre milioni?
Quante centinaja di migliaja in cento trentadue mila seicento quaranta?

Quale è il valore di:

Tremila cinquanta centinaja?
Tredici milioni trecento migliaja?
Quattro milioni quattrocento mila decine?
Mille cento undici milioni, cento mila cento undici?
Sei bilioni, trenta milioni, mille migliaja?
Qual'è il numero cento volte maggiore di settecento venticinque? Mille volte minore di due milioni cento mila? Cento volte minore di trecento trentaquattro milioni? Dieci volte maggiore di settantotto?

FRAZIONI.

Sappiamo oramai esprimere, in modo abbreviato, alcuni numeri interi de'più difficili. In quanto alle frazioni, esse vengono scritte in cifre, e constano di due numeri divisi da una lineetta orizzontale.

Il numero inferiore, detto: *Denominatore*, indica in quante parti uguali l'unità fu divisa.

Il numero superiore, chiamato: *Numeratore*, indica quante sono quelle parti uguali che si vogliono prendere

onde formarne la frazione. Laonde volendo esprimere quattro settimi si scrive:

$$\frac{4}{7}$$

Il denominatore 7 ci manifesta l'unità essere stata divisa in 7 parti uguali, mentre il numeratore 4 ci fa conoscere che sono quattro le parti uguali che si prendono.

Il denominatore ed il numeratore si chiamano eziandio: termini della frazione.

Giusta quanto precede $^1/_2$ $^2/_3$ $^3/_4$ $^4/_5$ $^6/_{11}$ ecc. significano: una metà, due terzi, tre quarti, quattro quinti, sei undecimi.

Ciò stante, per enunciare una frazione, basta dire il numeratore e quindi il denominatore.

A rappresentare il numero frazionario: quattro unità ed otto novesimi, si scrive: $4\ ^8/_9$ e così, sette unità dodici tredicesimi: $7\ ^{12}/_{13}$.

Scorgesi da ciò, che ogni frazione è un numero intero d'unità frazionarie, il cui nome viene dinotato dal denominatore e che, conseguentemente, il calcolo delle frazioni è pari a quello degl'interi concreti.

Esempio.

Due mele più tre mele fanno cinque mele, così pure $^2/_7$ più $^3/_7$ danno $^5/_7$, e via dicendo.

PROBLEMI SULL'ADDIZIONE E SOTTRAZIONE

Dicesi problema una domanda che vuole una soluzione.

Risolvere un problema è il trovarne la risposta.

Ecco un problema colla sua soluzione:

Quanto manca a tre individui perchè possano fornire L. 2300?

È saputo che il secondo possiede L. 728 dippiù del primo: il terzo L. 896 di meno del secondo, e che delle L. 1000 possedute dal primo 548 furono diggià spese.

Egli è evidente che il primo possiede L. 1000 — 548 ossia L. 452.

Il secondo L. 452 + 728, ossivero L. 1180, mentre il terzo L. 1180 — 896, ossia L. 284.

Tale si è la soluzione del proposto problema.

Eccone altri di soluzione parimente facile:

1.° Quanto convien aggiungere a 729, perchè, togliendone 598, la rimanenza sia 964? Risposta 833.

2.° Quanto convien togliere da 6002, perchè, aggiungendo 872 alla rimanenza, la somma sia 4698? Risposta 2176.

3.° Ciocchè occorre aggiungere a 789 per avere 1111, convien pure aggiungerlo ad un altro numero per avere 10000, quale sarà quest'altro numero? Risposta 9678.

4.° Un mercante avendo venduto 7004 metri di tela, gliene rimangono 972 meno di quanti metri ne ha venduti: quanta tela aveva egli? Risposta 13036 metri.

5.° Un cotale, debitore di L. 1724 verso un mercante, prende da questi per L. 3827 di merci e gli dà in pagamento un biglietto di L. 5970. Quanto dovrà restituire il mercante? Risposta L. 419.

6.° Il padre è nato nel 1778, la madre nel 1784, il figlio nel 1805 e la figliuola nel 1809: qual'è la somma dei loro anni nel 1828? Risposta 136 anni.

7.° Le patate furono importate in Europa nel 1586 da Francesco Drake. Da quanti anni vi erano desse in

uso, alla nascita d'un vecchio Russo, morto nel 1825 nell'avanzata età di anni 141? Risposta da 98 anni.

8.° Quale numero occorre aggiungere a 69 per avere la somma prodotta da 36 riuniti al numero separato da 424 quanto 120 supera 64? Risposta 335.

9.° Un giovane riceve una certa somma, indi spende L. 56, e non gli restano più che L. 16, che sono appunto L. 48 in meno di quanto aveva prima. Quanto ha ricevuto? Risposta L. 8.

10.° Ciò che devesi sottrarre da 7896 per trovare 1989, si deve aggiungere alla somma di due numeri, l'uno dei quali è 1799, per avere 8756: quale è l'altro numero? Risposta 1050.

11.° Sopra un debito di L. 20,000 un debitore paga cadun giorno L. 872 dippiù della vigilia, dando L. 974 pel pagamento del primo giorno. Quanto dovrà egli ancora dopo 6 giorni? Risposta L. 1076.

12.° Qual è la somma di 6 numeri tali, che ognuno di essi superi quello che gli tiene immediatamente dietro, d'una differenza uguale, saputo i due primi essere 72000 e 68972. Risposta 440412.

13.° Un pagatore ha L. 8784 con sei sacchi tali, che ognuno di essi racchiude L. 679 di meno del vicino, e l'ultimo contiene 9704. Quanto avrà ancora dopo di avere pagato 5 tratte di L. 549, 677, 869, 975 e 989? Risposta L. 52762.

Un prodotto accennato nel modo seguente: 4 × 5 × 3 × 6 significa sempre che occorre moltiplicare 4 per 3, il prodotto 20 per 3 ed il secondo prodotto 60 per 5, locchè darà a risultato simile il numero 360.

I numeri 4, 5, 3 e 6 sono i fattori di quel prodotto.

Il prodotto di tre e più fattori non cangia valore, quando s'invertisca l'ordine di due ultimi fattori.

Rendendosi il fattore di un dato prodotto un certo numero di volte più grande o più piccolo, il prodotto sarà di necessità altrettante volte più piccolo o maggiore.

Diffatti prendasi il prodotto $4 \times 7 \times 9 \times 3$, cioè nove volte maggiore del primo.

Nella stessa guisa, se si avesse il prodotto $4 \times (7 \times 9) \times 3$, e che si rendesse nove volte minore $7+9$, il nuovo prodotto sarebbe $4 \times 7 \times 3$, cioè nove volte minore del primo, il quale si riduce a $4 \times 7 \times 3 \times 9$.

Problema spiegato.

Un fabbricante vende 709 metri d'una prima stoffa, 800 d'una seconda e 98 di una terza e riceve L. 5000, per il tutto.

Ora siccome quelle stoffe gli costano rispettivamente 150 centesimi, 360 e 280 il metro si vuole sapere quanto egli avrà guadagnato sul suo contratto.

Anzitutto, dacchè il metro della prima stoffa costa centesimi 150, i metri 709 costeranno 709 volte 150 centesimi, ossivero centesimi 106350.

Nella stessa guisa gli 800 metri della seconda stoffa, costano 800 volte 360 centesimi, ossia 288000 centesimi, mentre li 98 metri della terza costano 98 volte 280 centesimi, cioè 27440 centesimi.

Quelle tre qualità di stoffe saranno adunque costate al fabbricante: $106350 \times 288000 \times 27440$ ossia 421790 centesimi.

E poichè egli ha venduto quelle tre stoffe per L. 5000 ossia 5000 volte 100 centesimi, pari a 500000 cente-

simi: ha guadagnato 500000 centesimi — 421900 ossivero 78,210 centesimi, pari a L. 782 e 10 centesimi.

Comprendendosi bene quanto precede, sarà facile risolvere i problemi seguenti:

Problemi:

1.° Il suono percorre 337 metri per ogni minuta seconda. A quale distanza sarà quegli che abbia udito lo sparo d'un cannone, 50 minuti secondi dopo averne vista la luce. Risposta: a 16850 metri.

2.° 720 pezzi da 3 fiorini caduno, quanto ne danno da 50 fiorini? Risposta: 216.

3.° Con L. 3000 d'annuo reddito quanto si sarà economizzato a capo di 10 anni, spendendo L. 5 al giorno? Risposta: L. 11750.

4.° Quanti minuti sono in 7 anni, l'anno essendo di 365 giorni, 5 ore e 48 minuti? Risposta: 367648.

5.° Se un soldato mangia al giorno 2 libbre di pane, quante libbre ce ne vorranno per nutrire un reggimento di 2540 uomini, durante 9 mesi di 30 giorni caduno? Risposta: libbre 1371600.

6.° Posseggo 260 chilogrammi di cacio, il cui prezzo è di soldi 48 per cadun chilogramma; se mi venisse fatto di venderne 125 chilogrammi a soldi 55, ed il resto a soli soldi 40 quanto perderei? Risposta: 455 soldi.

7.° Sopra mesi 15 di stipendio a L. 185 mensili, un impiegato paga 18 mesi di dozzina, in ragione di L. 110 cadun mese; quanto dovrà rimanergli? Risposta: L. 795.

8.° È supposto che in un'opera di 9 volumi, ogni volume conti 320 pagine, ogni pagina 36 linee, ed ogni linea

50 lettere; quante lettere saranno nei 9 volumi? Risposta: 5472000.

9.° Quanto si guadagnò ricevendo L. 4000 per chil. 1642 di zucchero il quale costava 206 centesimi al chilogramma? Risposta: 61748 centesimi.

10.° Un mercante vende 126 metri di panno per 3600 lire e guadagna lire cinque per ogni metro. Quanto gli sarà costato quel panno? Risposta: L. 2970.

11.° Se un mercadante vendesse le sue merci L. 120 di più, guadagnerebbe 19 volte la spesa fatta di L. 325. Quanto li venderebbe? Risposta: L. 6380.

12.° Si diedero 87 napoleoni d'oro da L. 20 in pagamento di tre tagli di stoffa, misuranti uno 24, l'altro 50 e l'ultimo 15 metri, e del prezzo di: il primo L. 36, il secondo L. 4 e l'ultimo L. 21 cadun metro. Quanto dovrebbe quel mercante restituire? Risposta: L. 361.

DIVISIONE.

A dividere un numero susseguito da qualche zero, dall'unità pure seguita da zeri, basta cancellare nella parte destra del dividendo tanti zeri quanti sono quelli esistenti nel divisore.

Così: 75000 : 100 = 750. E diffatti il dividendo 75000 esprime 750 centinaia ossia 750 volte cento; contiene adunque 100 volte 750. Così pure 9800000 : 1000 = 9800.

Se vuolsi dividere un numero per 10, 100, 1000, basta cancellare 1, 2, 3 cifre alla destra di quel numero. Le cifre rimaste a sinistra segneranno gl'interi del quoziente e quelle soppresse, le frazioni di esso.

Così sia da dividersi il numero 7458 per 100, avrassi 74 per quoto richiesto e 58 per rimanente della divisione.

Diffatti 7458 = 7400 + 58 = 74 volte 100 + 58. Cosicchè 7458 contiene 100, 74 volte più la rimanenza 58.

Si può, senza cambiare il valore del quoziente, cancellare lo stesso numero di zeri sì dal divisore che dal dividendo.

Esempio:

$$49000 : 700 = 490 : 7.$$

Nel primo caso si dividono 490 centinaia per 7 centinaia; nel secondo 490 unità per 7 unità; ora rimane evidente che 490 centinaia contengono sette centinaia altrettante volte quanto 490 unità contengono 7 unità; il quoziente è dunque lo stesso in ambi i casi.

Quando la divisione lascia un resto, il quoziente completo è un numero frazionario nel quale i due termini della frazione sono il resto e il divisore.

Si abbia, per esempio, a dividere 7254 per 89; si avrà per quoziente 81 col resto 45 che non contiene che $\frac{45}{89}$ del divisore 89, di modo che 81 $\frac{45}{89}$ è il quoziente completo di 7254 per 89.

7254	89	
134	81	$\frac{45}{89}$
85		

Si dimostra:

1.° Se il dividendo diventa 4 volte maggiore o minore, il quoziente diventerà anch'esso 4 volte maggiore o minore.

2.° Se il divisore diventa 3 volte maggiore o minore, il quoziente al contrario diventerà 3 volte minore o maggiore.

3.° Infine, se il dividendo e il divisore diventano ciascuno 2 volte maggiori o minori, il quoziente resterà lo stesso.

Per aver subito il quoziente di due numeri scomposti nei loro minimi fattori, basta sopprimere al dividendo tutti i fattori del divisore, e moltiplicare fra di loro i fattori rimanenti. E così:

$$7 \times 3 \times 2 \times 2 \times 5 : 2 \times 2 \times 5 = 7 \times 3 = 21.$$

Difatto, essendo il dividendo il prodotto del divisore per il quoziente, questo dividendo ha necessariamente per fattori tutti quelli del quoziente e del divisore; dunque se in questo dividendo si sopprimono i fattori del divisore, i fattori che restano saranno quelli del quoziente.

Quando il dividendo e il divisore hanno fattori comuni, si semplifica la divisione sopprimendo questi fattori comuni. Per esempio, il quoziente dei numeri 24 e 20 o $6 + 4$ e $5 + 4$ è lo stesso che quello dei numeri più semplici 6 e 5. Difatti, essendo 24 i $\frac{6}{5}$ di 20, il quoziente di 24 per 20 è $\frac{6}{5}$.

Ma il quoziente di 6 per 5 è anche $\frac{6}{5}$; dunque $24 : 20 = 6 : 5$.

Si dividono 720 mele a tre fanciulli in modo che quando il primo abbia due mele, il secondo ne abbia 6; e quando il secondo ne prenda 3, al terzo ne tocchi 12. Quale sarà la parte di ciascun fanciullo?

Gli è chiaro che il secondo avrà 3 volte tante mele di quante ne avrà il primo, e il terzo 4 volte tante di quante ne avrà il secondo. Se adunque, il primo riceve una mela, il secondo ne avrà tre, e il terzo quattro volte tre, ossia 12; ciò che fa in tutto 16 mele.

Così, il primo avrà tante volte una mela quante volte il 16 è contenuto in 720.

Ora il 16 in 720 è contenuto 45 volte; dunque il primo riceverà 45 mele. Il secondo ne avrà 3 volte 45 o 135, e il terzo 4 volte 135 o 540.

Effettivamente, 45 + 135 + 540 = 720.

Altri problemi spiegati.

Problema.

Una fontana fornisce 120 litri d'acqua all'ora; in quanti giorni ha potuto fornire 1814400 litri d'acqua, e per quanti mesi di 30 giorni basterà questa quantità d'acqua alla consumazione d'una birraria che ne impiega ogni giorno 12 barili di 100 litri ciascuno?

Spiegazione.

In un giorno o 24 ore, la fontana fornisce 24 volte 120 litri o 2880 litri d'acqua; per fornire 1814400 litri essa ha impiegato tanti giorni quante volte 2880 è contenuto in 1814400; dunque ha impiegato 630 giorni. D'altra parte, la birreria consuma al mese 30 volte 12 barili o 360 barili, o ancora 36000 litri; così per consumare 1814400 litri, vi vorranno tanti mesi quante volte 36000 è contenuto in 1814400; vi vorranno per conseguenza 50 mesi $\frac{2}{5}$ o 50 mesi e 12 giorni.

Problema.

Si comperano 12 litri d'acquavite a 50 soldi il litro da rivendere al minuto.

I bicchieri che si hanno a questo uso sono troppo grandi, giacchè non ve ne sono che 20 in un litro, e

non si vuol vendere ogni bicchiere che 2 soldi. Si mette perciò dell'acqua nell'acquavite, e ve se ne mette tanta che il miscuglio venduto dia 20 lire di benefizio.

Quant'acqua si è messa? Si sa che 1 lira = 20 soldi.

È evidente che 12 litri a 50 soldi fanno 12 volte 50 soldi o 600 soldi o ancora 30 lire, che col guadagno di 20 lire danno 50 lire per prezzo della vendita del miscuglio. Ma il litro del miscuglio costa 20 volte 2 soldi o 40 soldi, o 2 lire; dunque vi sono nella mescolanza tanti litri quante volte 2 lire sono contenute in 50 lire; dunque 25 litri; per conseguenza si è aggiunto 25 — 12 o 13 litri d'acqua.

Sarà bene esercitarsi a risolvere i seguenti problemi:

1.° Quante volte si deve prendere 12 per aver il prodotto di 456 per 15. Risposta: 570 volte.

2.° Uno scozzone impiega L. 7990 nel comprar dei cavalli; li rivende in seguito per L. 8466, e guadagna L. 28 su ciascun cavallo. Quanti cavalli aveva? Risposta: 17.

3.° Si sono spesi 5 sacchi di soldi 875 ciascuno per comperar della tela a 35 soldi il metro. Quanti metri se ne è comprato? Risposta: 125.

4.° Quanto cioccolatte a 42 soldi la libbra si avrà per 3 pezze di tela di 35 metri ciascuna a 28 soldi il metro? Risposta: 70 libbre.

5.° Due viaggiatori partono insieme dalla stessa città per andare a 720 leghe di là; l'uno fa 15 leghe al giorno, l'altro 16. Quanti giorni prima dell'altro arriverà questi? Risposta: 3.

6.° La vasca d'una fontana può contenere 736000 litri; ne riceve 954 all'ora, e ne perde 634. Dopo quanti giorni potrà essere riempita, sapendosi che conteneva

già 1600 litri d'acqua? Risposta: dopo 90 giorni e 18 ore.

7.° Si compera dell'acquavite per L. 30 e vi si mette 13 litri d'acqua; si vende la mescolanza a 2 soldi il bicchiere e si guadagna 20 lire sopra il tutto. Supponendo che il litro contenga 20 bicchieri, si domanda quanta acquavite si era comperata? Risposta: 13 litri.

8.° Sono stati adoperati 50 carretti contenenti ciascuno 450 pani del peso di tre libbre di 16 oncie, per trasportare il pane necessario ad una divisione di fanteria durante 14 giorni. Quanti uomini erano in quella divisione sapendosi che la razione giornaliera del soldato è di 24 oncie di pane? Risposta: 18000.

9.° Durante un assedio di 18 giorni, i pezzi di batteria hanno tirato 75 colpi ciascuno, ogni giorno. Se la polvere costasse 15 soldi la libbra, il prezzo totale di quella che è stata consumata sarebbe di L. 275400. Qual era il numero dei pezzi di batteria, sapendosi che la carica media di ciascuno era di 8 libbre di polvere? Risposta: 34 pezzi.

10.° Dividere L. 72288 fra quattro persone in modo che la seconda abbia 3 volte tanto quanto la prima, la terza 2 volte tanto quanto la seconda e la quarta 5 volte meno delle altre tre. Quali saranno le parti? Risposta: la prima sarà di L. 5024, ecc.

11.° Un muratore aveva preso a scavare un pozzo che doveva avere 10 metri di profondità, mediante la somma di L. 220 per tutto il lavoro, e morì quando non ne aveva fatto che 4 metri. Quanto gli si doveva allora, sapendosi che il prezzo del lavoro cresce in proporzione della profondità? Risposta L. 40.

Ciò che si trova supponendo che il primo metro costi L. 1.

12.° Si hanno 45 metri di una stessa stoffa in tre tagli; il primo costa L. 60; il secondo L. 90; il terzo L. 120. Quanti metri sono in ogni taglio? Risposta: 10 metri nel primo, ecc.

13.° Per un lavoro di 217 metri fatto da 3 operai, essi hanno ricevuto L. 140 che si devono fra di loro dividere in modo che ognuno sia pagato in proporzione del suo lavoro. Ne risulta che quando il primo prende L. 4, il secondo ne ha 8, e quando il secondo ne ha 8 il terzo ne deve aver 12. Trovare il lavoro e il guadagno di ciascun operaio.

SISTEMA DECIMALE.

Un uomo ha messo 4 settimane per fare 168 leghe e si è riposato le domeniche. Quante leghe ha fatto ogni giorno?

Gli è chiaro che quest'uomo faceva ogni settimana il quarto di 168 o 42 leghe.

E siccome si riposava le domeniche, non camminava che 6 giorni della settimana. Dunque in 6 giorni faceva 42 leghe, e 7 leghe al giorno.

Problema.

Quaranta operai in 8 giorni hanno fatto 7680 metri di lavoro; quanti metri dello stesso lavoro faranno 24 operai della stessa forza in $\frac{21}{6}$ di giorni?

40 operai	in 8 giorni	hanno fatto	. . .		7680 met.
Dunque 1 operaio	in 8 giorni	farà il	40° di 7680,	o	192 »
» 1	» 1	»	8° di 192,	o	24 »
» 1	» $1\frac{1}{6}$	»	6° di 24,	o	4 »
» 1	» $1\frac{21}{6}$	»	21 volte 4 m.	o	84 »

24 operai in $\frac{21}{6}$ di giorno faranno 24 volte 84 metri o 2016 metri.

Due truppe d'operai, l'una di 324 uomini e l'altra di 279 hanno dissodato metri quadrati 451647 di terreno; quanto è costato ogni metro, sapendosi che la prima truppa ha ricevuto in pagamento 8561070 centesimi più dell'altra.

Spiegazione.

È facile trovare che la prima truppa ha dissodato 33705 metri quadrati più della seconda. Ora gli 8561070 centesimi che la prima ha ricevuto di più dell'altra, non possono essere che il prezzo di 33705 metri che essa ha fatta di più, dunque 1 metro costa la 33705ma parte di 856107 o 254 centesimi. Cioè L. 2,54.

Trenta metri di lunghezza su 6 di larghezza d'una stoffa avente 4 quinti di qualità hanno costato L. 729; quanto costeranno 42 metri di lunghezza su 3 quarti di larghezza d'un'altra stoffa che ha 2 di qualità?

Se 30^m su 6 di larg. e $^4/_5$ di qualità costano L.				720
30^m	»	4	cost. 5 volte	720 o 3600
30^m	»	2	cost. la metà di	3600 o 1800
6^m	»	2	cost. il 5.° di	1800 o 360
42^m	»	2	cost. 7 volte	360 o 2520
42^m su 3	»	2	cost. la metà	o 1260
42^m $^3/_4$	»	2	cost. il quarto	o 315

Ecco alcuni problemi a risolvere:

1.° Dodici metri di stoffa che costavano L. 324 sono stati venduti 432 lire. Quanto si è guadagnato per metro? Risposta: L. 9.

2.° Con 24 metri di bigello ho pagato 126 giornate di operai a 28 soldi ciascuna. Quanto è stato contato al metro? Risposta 147 soldi.

3.° Quanto si deve togliere dai 17 ventiquattresimi di 864 per aver i 3 quinti di 75? Risposta: 567.

4.° Un tale ha L. 2595 di rendita annua. Quanto può egli spendere in media ogni giorno per risparmiare L. 1500 ogni anno? Risposta: L. 3.

5.° Un famiglio riceve ogni anno L. 50, più un abito, e in capo a 5 mesi gli si deve 35 lire. Quanto vale l'abito?

6.° Qual è la parte di 45 che è contenuta 6 volte nel quintuplo del terzo e mezzo di 36? Risposta: il terzo.

7.° Moltiplicando un numero per 7 si aumenta di 15852; e se lo si aggiunge ai 3 quarti d'un altro numero, la somma sarà 10484. Qual è quest'ultimo numero? Risposta: 10456.

8.° Due balle d'una stessa stoffa contengono 944 metri, e una avendone 152 metri più dell'altra costa lire 101 84 cent. di più. Trovare il loro prezzo e il numero dei metri di ciascuna. Risposta: una costa L. 36716 e contiene metri 548.

9.° Cinquanta operai, che guadagnano tanto uno quanto l'altro, hanno ricevuto per 15 giorni di lavoro una certa somma; se essi avessero ricevuto 2250 soldi di più, avrebbero guadagnato 50 soldi al giorno ciascuno. Quanto guadagnano realmente? Risposta: 47 soldi.

10.° Qual è la rendita annuale di due persone che spendono ogni giorno i 3 quarti della loro rendita giornaliera? Si sa che uno ha speso L. 135 in 45 giorni e l'altro 360 in 300 giorni. Risposta: la prima ha L. 1460 di rendita annua, e la seconda L. 584.

11.° Ad un giuocatore che aveva 40 lire, resta il triplo di quello che ha perduto. Quanto gli resta? Risposta L. 30.

USO DELLE QUATTRO PRIME REGOLE DELL'ARITMETICA.

Le quattro prime regole dell'Aritmetica sono l'addizione, la sottrazione, la moltiplicazione e la divisione.

L'uso dell'addizione e della sottrazione è sempre facile a riconoscersi se si osserva bene la definizione di queste due operazioni, ritenendo che una di esse serve di prova all'altra.

MOLTIPLICAZIONE.

La moltiplicazione si usa in tre casi:

1.° A verificare la divisione;

2.° A trovare il valore totale di più unità della stessa specie quando si conosce il valore di una, per esempio a trovare ciò che valgono 49 metri di stoffa, se un metro vale L. 9.

Difatti, se un metro costa 9 lire, 49 metri costano 49 volte 9 lire, o il prodotto di 9 per 49;

3.° La moltiplicazione serve a ridurre delle unità d'ordine superiore in unità d'ordine inferiore; per esempio a ridurre 8 giorni in ore.

Difatti, se il giorno vale 24 ore, gli otto giorni varranno 8 volte 24 ore, o il prodotto di 24 per 8.

DIVISIONE.

La divisione ha quattro usi principali:

1.° Serve a verificare la moltiplicazione;

2.° Serve a determinare il valore particolare di un'unità quando si conosce il valore totale di un numero delle stesse unità; per esempio a trovare ciò che costa un metro di stoffa, se 36 metri costano 1660 lire.

Difatti, se 36 metri costano 1660 lire, un metro costerà la 36ma parte di 1660, o il quoziente di 1660 per 36. Questo quoziente è 46, col resto di 4 che vale 4 volte 100 o 400; la 36ma parte di 400 centesimi è 11 centesimi, colla 36ma parte di 4 centesimi che si può lasciare. Di modo che il metro di stoffa costa L. 46 e 11 centesimi;

3.° La divisione serve anche a trovare il numero delle unità quando si conosce il loro valore totale e il valore di ciascuna; per esempio a trovare quanti litri di vino si possono avere per 7540 centesimi, se il litro costa 90 centesimi. Gli è evidente che quante volte 90 centesimi, valore d'un litro, è contenuto in 7540 centesimi, tanti litri si avranno per questa ultima somma; si troverà adunque il numero dei litri cercato, dividendo 7540 per 90; essendo il quoziente 83 $\frac{7}{9}$ si avranno 83 litri $\frac{7}{9}$. Ma $\frac{7}{9}$ di litro valgono il 9.° di 7 litri, o il 9mo di 700 decilitri, o 77 dei $\frac{7}{9}$. E siccome $\frac{7}{9}$ di decilitri possono essere presi per + +; ne segue che $\frac{7}{9}$ di litro valgono 78 decilitri, e così si vede che per 7540 si avranno 83 litri 78 decilitri.

4.° Infine la divisione serve a ridurre 72410 minuti in ore. Difatti, l'ora vale 60 minuti, dunque, quante volte 60 minuti, valore di un'ora, saranno contenuti in 72410 minuti, altrettante ore vi saranno in 72410 minuti. Si avrà dunque il numero d'ore cercato, dividendo 72410 minuti per 60 minuti; ciò che darà 1206 al quoziente, col resto di 50 che contiene $\frac{5}{6}$ 60; di modo che 72400 minuti valgono ore 1206 $\frac{5}{6}$.

Ora per risolvere qualunque questione numerica, bisognerà sempre procurare di scomporla in problemi elementari ai quali siano applicabili gli usi delle quattro prime regole dell'aritmetica, e risolvere in seguito questi problemi; ciò che si riduce sovente a cercare il valore d'un'unità per risalire a quello di più unità.

Per esempio:

Un mercante aveva 54 metri di stoffa; ne ha venduto 28 metri. Qual è il prezzo del resto, sapendosi che 7 metri di questa stoffa hanno costato 42 lire? Se il mercante aveva 54 metri di stoffa e ne ha venduto 28 metri, gliene resta evidentemente 54 — 28 o 26. Ma 7 metri costano 42 lire; un metro costa dunque il settimo di 42 lire o 6 lire, e i 26 metri costano per conseguenza 26 volte 6 lire, o 156 lire. Il prezzo del resto è dunque di 156 lire.

Gli è facile vedere che questo modo di risolvere il proposto problema, riesce a scomporlo nelle tre seguenti questioni elementari:

1.° Se il mercante aveva 54 metri, e ne ha venduto 28, quanti metri gliene restano ancora? Risposta: 26 metri.

2.° Se 7 metri di stoffa costano 42 lire; quanto costerà un metro? Risposta: 6 lire.

3.° Se un metro di stoffa costa 6 lire, quanto costeranno 26 metri? Risposta 156 lire.

Tutte le questioni numeriche possono essere così scomposte in questioni elementari a cui sono applicabili le prime regole aritmetiche, e ciò che abbiamo detto più sopra basta a dimostrare come questa scomposizione sia applicata negli esempi di cui ci occuperemo.

Esempi:

Un fornaio compera 1484 fasci di legna, e non ne paga che 1400. Quanto ne ha egli di più sopra ogni cento che ha pagato?

Quanti giorni impiegheranno due operai per fare insieme un lavoro di 231420 metri? Si sa che il primo fa 1856 metri in 64 giorni, e il secondo 2232 in 72 giorni. Se il primo fa 1856 metri in 64 giorni, in un giorno egli farà il 64mo di 1856 o 29 metri. E così, il secondo in un giorno farà il 72mo di 2232 metri o 31 metri. I due operai fanno adunque insieme in un giorno 29 + 31 metri o 60 metri. Così, per fare insieme 231420 metri abbisognerà loro tanti giorni quante volte 60 metri sono contenuti in 231420; abbisognerà loro adunque 3857 giorni. E ciò si verifica prendendo questo numero di giorni e cercando il lavoro totale dei due operai, o il numero dei metri che il secondo fa in 72 giorni. Ciò che si fa pei due seguenti problemi, ciascuno de' quali è una prova dell'altro.

1.° Quanti metri di lavoro hanno fatto due operai lavorando insieme in 3857 giorni? Si sa che uno fa 1856 metri in 64 giorni e l'altro 2232 metri in 72 giorni;

2.° Due operai hanno impiegato 3857 giorni per fare insieme un lavoro di 231420 metri; il primo ha fatto 1856 metri in 64 giorni. Quanti metri ne ha fatto il secondo in 72 giorni?

Un padre e suo figlio hanno insieme 60 anni, e l'età del padre è il quadruplo di quella del figlio. Quale è l'età di ciascuno? Se l'età del padre è quattro volte maggiore di quella del figlio, gli è chiaro che le due età riunite valgono 5 volte quella del figlio; ma le due età riunite fanno 60 anni, dunque 5 volte l'età del figlio vale 60 anni; l'età del figlio vale dunque il 5.° di 60 o 12 anni, e l'età del padre vale per conseguenza 4 volte 12 anni, o 48 anni. Difatti $48 + 12 = 60$.

Due viaggiatori seguono la stessa via e vanno nella stessa direzione, il primo è avanti dell'altro di 6450 metri e fa 4800 metri in 2 ore, mentre il secondo fa 560 metri in 8 minuti. Dopo quanti minuti di cammino, il secondo viaggiatore avrà raggiunto il primo? È chiaro che quante volte il numero dei metri che il secondo viaggiatore fa ogni minuto più del primo sarà contenuto nei 6450 metri che egli deve fare di più per raggiungerlo, altrettanti minuti impiegherà a questo scopo; saranno adunque 125 minuti. Ciò si verifica calcolando il cammino fatto da ogni viaggiatore in 125 minuti.

Due operai hanno ricevuto: uno 4220 lire e l'altro 3072; il primo ha lavorato 6 giorni più del secondo, e guadagnò ogni giorno i $\frac{9}{8}$ di ciò che guadagna il secondo. Quanto guadagna ciascuno giornalmente? Se il primo guadagna i $\frac{9}{8}$ di ciò che guadagna il secondo,

guadagnando questi 8, l'altro guadagnerà 9. Così, intanto che il secondo guadagna 8, il primo guadagna 9; dunque, intanto che il secondo guadagna 3072 cent. o 384 volte 8, il primo guadagna 384 volte 9 o 3456. Ma questo primo ha guadagnato 4320 cent. La differenza 4320 — 3456 o 864 è adunque ciò che ha guadagnato di più del secondo in 6 giorni di lavoro. Per conseguenza, il primo in 6 giorni guadagna 864 cent. in un giorno egli adunque guadagna 144 cent., per guadagnare 4320 cent. egli avrà impiegato 4320 : 144 o 30 giorni; il secondo avrà dunque lavorato 30 — 6 o 24 giorni per guadagnare 3072 cent., e guadagnerà così ogni giorno il 24mo di 3072 cent. o 128 centesimi.

Altri problemi a risolvere.

1.° Un operaio in 11 mesi ha guadagnato 429 lire. Quanti mesi impiegherà a guadagnare 1053 lire? Risposta: 27 mesi.

2.° Un operaio aveva 429 piedi di lavoro di cui ha fatto 85 piedi in 5 giorni. Quanti giorni impiegherà a fare il resto? Risposta: 12 giorni.

3.° Con 385 monete di 6 centesimi, quanti fogli di carta si possono comprare a 7 cent. il foglio? Risposta: 330.

4.° Una contadina compra dei polli per 54 lire e li rivende per 75 lire, guadagnando in questo negozio 35 cent. ogni mezza dozzina. Quanto ha pagato ogni pollo? Risposta: 150 centesimi.

5.° Si comprarono dei fastelli di legna colla condizione che su ogni 100 fastelli pagati se ne avrà 6 per soprammercato, e se ne presero 1484. Quanti se ne dovrà pagare? Risposta: 1400.

6.° Due balle della stessa stoffa, rinchiudono metri 944; una costa 36716 centesimi, l'altra contiene 596 metri. Qual è il prezzo di quest'ultima? Risposta: 26532 centesimi.

7.° Due operai avendo lavorato durante tre settimane hanno ricevuto 96 lire. Uno di essi guadagnò 2 lire al giorno. Quanto guadagna l'altro? Risposta: 3 lire.

8.° Si sono comperate 3 pezze di stoffa di 34 metri ciascuna per L. 1734, e si sono rivendute guadagnando L. 51 per ogni pezza. Quanto si è rivenduto il metro? Risposta: 1850 centesimi.

9.° Trenta metri di lunghezza sopra 4 di larghezza di una certa stoffa hanno costato 360 lire. Quale sarà il prezzo di 57 metri di lunghezza sopra 3 di larghezza della stessa stoffa? Risposta: 513 lire.

10.° Venti metri d'una certa stoffa costano 480 lire, 749 metri d'un'altra stoffa costano 41944 lire. Quanti metri della seconda stoffa valgono 721 metri della prima stoffa? Risposta: 309.

11.° Un mercante compra 24 metri di stoffa a L. 36 ciascuno, 115 metri di tela a L. 3, metri 50 mussolina a L. 4, e 15 metri di casimiro a L. 20; dà in pagamento 87 pezze da 20 lire, e vuole sapere quanto gli si deve rendere. Risposta: 16 lire.

12.° Due operai hanno lavorato, uno 72 giorni e l'altro 45, a un lavoro pel quale hanno ricevuto 72828 centesimi. Siccome 8 giornate del primo operaio valgono 9 del secondo, si domanda quanto ha guadagnato ciascuno? Risposta: il primo 46818.

13.° Tre anni fa un padre aveva 40 anni e suo figlio 4. Fra quanti anni l'età del padre sarà 4 volte maggiore di quella del figlio? Risposta: fra 5 anni.

14.° Qual è il numero di cui una parte vale 98 volte l'altra e la sorpassa di 55,872? Risposta: 57024.

15.° Tre operai hanno ricevuto 12648 centesimi per un lavoro che hanno fatto insieme; il primo vi ha lavorato 19660 ore e il secondo 22500. Quante ore vi ha lavorato il terzo per avere 4216 centesimi di guadagno totale? Risposta: 21080 ore.

16.° Trovare l'età d'un padre e quella di suo figlio supponendo: 1.° che l'età del padre valga 12 volte quella del figlio e la sorpassi di 55 anni; 2.° che abbiano insieme 40 anni, e fra 4 anni l'età del padre sarà doppia di quella del figlio; 3.° che abbiano insieme 60 anni e che 5 anni fa l'età del figlio fosse il quarto di quella del padre; 4.° che l'età del padre essendo 15 volte quella del figlio, fra 10 anni lo sorpassi di 24 anni.

DELLA DIVISIBILITÀ DEI NUMERI E DELLA RICERCA DEL MASSIMO COMUN DIVISORE.

Un numero intiero è divisibile per un altro quando lo contiene più volte senza avanzo; e un numero intiero divide un altro quando vi è contenuto esattamente più volte.

Così 18 è divisibile per 3 e 3 divide 18.

MULTIPLI E SOTTO MULTIPLI.

Si dice multiplo d'un numero intiero il prodotto di questo numero per un altro anche intiero.

Così 4 volte 5 o 20 è un multiplo di 5.

Si dice che numero intiero è sotto-multiplo di un altro

quando vi è contenuto esattamente più volte; per esempio 6 è un sotto multiplo di 24.

Il sotto multiplo d'un numero è dunque divisore o fattore di questo numero.

Se un numero divide esattamente un altro numero, ne dividerà anche esattamente tutti i multipli.

Il prodotto di più numeri intieri essendo necessariamente multiplo di ciascuno de' suoi fattori, si vede che *quando un numero divide uno dei fattori d'un prodotto, divide questo prodotto.*

Così 48 essendo divisibile per 8, il prodotto di $17 \times 48 \times 5$ è divisibile per 8.

Ogni numero terminato da zero è divisibile per 10, per 2 e per 5. Tale è 7460.

Difatti il numero 7460 vale 746 volte 10; esso contiene dunque 746 volte il 10. Ma 10 essendo divisibile per 2 e per 5, il suo multiplo 746 volte 10, o il numero proposto 7460 è dunque divisibile per 10 e per 5.

Ogni numero terminato per 5 è divisibile per 5.

Per esempio 785 è divisibile per 5.

Difatti, è chiaro che $785 = 780 + 5$; ora 5 divide ciascuno dei due numeri 5 e 780; dunque divide la loro somma 785.

È a notarsi che se l'ultima cifra non fosse nè 0 nè 5, il numero non sarebbe divisibile per 5, imperocchè, per esempio $748 = 745 \times 3$; ora la prima parte di 745 è divisibile per 5, ma la seconda, 3, non è divisibile per lo stesso numero. Così è di $462 = 460 + 2$.

Ragionando come si è fatto più sopra, e osservando: 1.° che 100 è divisibile per 4 e per 25; 2.° che 1000 è divisibile per 8 e per 125, si vedrà che:

1.° Un numero è divisibile per 4 o per 25 quando le sue due ultime cifre a destra fanno un numero divisibile per 4 o per 25.

2.° Un numero è divisibile per 8 o per 125 quando le sue tre ultime cifre a destra fanno un numero divisibile per 8 o per 125.

Ogni numero terminato dalle cifre 0, 2, 4, 6, 8, è divisibile per 2. Tale è 974.

IL MASSIMO COMUN DIVISORE.

Si chiama massimo comun divisore di due numeri il più gran numero che può dividerli tutti e due esattamente.

D'ora innanzi, per abbreviare l'espressione *massimo comun divisore*, si scriverà: m. c. d.

Il m. c. d. di due numeri è uguale al prodotto di tutti i fattori primi, comuni a questi due numeri.

La determinazione del m. c. d. posa sul seguente principio: « Il m. c. d. di due numeri è sempre quello del più piccolo e del resto della loro divisione. »

Abbiasi, per esempio, i due numeri 724 e 96, dividendo il primo pel secondo $\frac{724}{52}\Big|\frac{96}{7}$

Si avrà il quoziente 7 e il resto 52. Ora, si è trovato questo resto, sottraendo 96 volte 7 da 724.

Si ha dunque $724 - 7 \times 96 = 52$

Dal quale risulta $724 - 7 \times 96 + 52$

Così i due m. c. d. uno de' quali X tra 724 e 96, l'altro Y tra 96 e 52, sono tali che uno non potrebbe sorpassar l'altro; dunque sono uguali e non ne formano che un solo.

REGOLA.

Per trovare il m. c. d. di due numeri, bisogna dividere il maggiore per il minore; il minore per il resto della prima divisione; il secondo per il resto, e così di seguito.... Quello dei resti che dividerà esattamente il precedente sarà il m. c. d. dei due numeri proposti; e se si ottiene per resto 1, questi numeri saranno primi fra di loro.

Secondo questa regola, per trovare il m. c. d. dei due numeri 9009 e 423, si scriverà il resto di ogni divisione a destra del divisore corrispondente per essere divisore nella divisione seguente; e se vi ha un resto parziale, lo si metterà al disopra del dividendo parziale mettendovi a fianco la cifra seguente del dividendo, e si avrà così un nuovo dividendo parziale.

In questo modo si avrà la seguente operazione:

549	423	126	45	36	9
9009	21	3	2	1	4

Il m. c. d. dei due numeri 9009 e 423 non potendo sorpassare 423, è chiaro che se 423 dividesse esattamente 9009, sarebbe il m. c. d. di sè medesimo; bisogna dunque in primo luogo dividere il più gran numero 9009 per il più piccolo 423. E siccome si ha 21 per quoziente e 126 per resto, ne segue che 423 non è il m. c. d. cercato.

Ma il *massimo comun divisore* dei due numeri 9009 e 423 essendo anche quello del più piccolo 423 e del resto 126 della loro divisione, questo m. c. d. non potrebbe sorpassare 126. Se dunque 126 dividesse 423, 126 sarebbe esso stesso il m. c. d. domandato. Si deve dunque dividere il numero minore 423 per il primo resto 126.

Si vedrà nello stesso modo che bisogna dividere il primo resto 126 per il secondo 45, il secondo 45 per il terzo 36, il terzo 36 per il quarto 9. E siccome il quarto resto 9 divide esattamente il precedente 36, si conchiude che 9 è il m. c. d. dei due numeri proposti 9009 e 423.

Difatti, siccome 9 divide 36 e si divide esso stesso, ne segue che 9 è divisore comune ai due numeri 36 e 9 ed è il maggiore, perchè non vi è alcun numero più grande del 9 che possa dividere 9.

Ora il m. c. d. dei due numeri 45 e 36 e quello del minore 36 e del resto 9 della loro divisione; è dunque 9; il m. c. d. dei due numeri 126 e 45 e quello del minore 45 e del resto 36 della loro divisione è dunque ancora 9; e si vedrà anche che 9 è il m. c. d. dei due numeri 423 e 126, e in fine dei due numeri proposti 9009 e 423.

Ecco che cosa bisogna dimostrare:

Della trasformazione delle frazioni.

Noi sappiamo già che cosa è una frazione e un numero frazionario, e come si scrivono in cifre queste due sorta di numeri.

Ora secondo che il numeratore vale meno, altrettanto, o più del denominatore, la frazione vale meno, altrettanto o più del numero intiero.

Difatti:

1.° Se il numeratore è minore del denominatore come in $\frac{8}{11}$, la frazione non contiene tutte le parti eguali che sono nell'unità, e sarà dunque minore dell'unità.

2.° Se il numeratore è eguale al denominatore come in $\frac{12}{12}$, la frazione contiene precisamente tutte le parti

eguali che sono nell'unità, dunque essa vale quanto l'unità.

Da ciò segue che 1 vale $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{4}{4}$, $\frac{5}{5}$, $\frac{6}{6}$, $\frac{7}{7}$, $\frac{8}{8}$, $\frac{9}{9}$, $\frac{10}{10}$, ecc.

3.° Infine, se il numeratore è maggiore del denominatore come $\frac{18}{7}$, la frazione contiene più parti di unità dell'unità stessa; dunque sarà maggiore dell'unità e potrà convertirsi in numeri frazionarii.

« Per convertire una frazione in numero frazionario, basta effettuare completamente la divisione del numeratore per il denominatore ».

Per esempio, in $\frac{71}{11}$, si dividerà 71 per 11, ciò che darà 6 al quoziente, col resto 5, che non contiene che i $\frac{5}{11}$; di 11; e si conchiuderà che $\frac{71}{11} = 6\ \frac{5}{11}$.

Difatti, 71 undicesimi valgono 66 undicesimi più 5 undicesimi. Ma 66 undicesimi fanno 6 volte 11 undicesimi, o 6 volte 1 o 6; dunque 71 undicesimi valgono 6 unità e 5 undicesimi.

In più brevi termini:

$$\frac{71}{11} = \frac{66}{11} + \frac{5}{11} = 6 \text{ volte } \frac{11}{11} + \frac{5}{11} = 6 \text{ volte } 1 + \frac{5}{11} = \frac{65}{11}$$

« Reciprocamente, per convertire un numero frazionario in una sola frazione, bisogna aggiungere il numeratore al prodotto del denumeratore per il numero intiero e dare alla somma il denominatore proposto ».

Così si avrà: $4\ \frac{7}{8} = \frac{39}{8}$.

Difatti ogni unità vale 8 ottavi; le 4 unità valgono

dunque 4 volte 8 o 32 ottavi che, coi 7 ottavi del numero proposto, fanno 39 ottavi.

Più brevemente:

$$4\,\frac{7}{8} = 4 \text{ volte } 1 + \frac{7}{8} = 4 \text{ volte } \frac{8}{8} + \frac{7}{8} = \frac{32}{8} + \frac{7}{8} = \frac{39}{8}$$

Nella stessa guisa; l'unità valendo 6 sesti, 5 unità valgono 5 volte 6 sesti o 30 sesti; di modo che $5 = \frac{30}{6}$.

« Così ogni numero intiero si può convertire in una frazione che abbia un denominatore dato ».

Se il denominatore dato è 1, indicherà che l'unità è divisa in una parte eguale; ora non vi ha realmente divisione in questo caso, e ciò che si chiama allora parte è l'unità stessa; donde segue che l'unità val 1 unità o $\frac{1}{1}$ e che 4 unità valgono 4 volte $\frac{1}{1}$ o $\frac{4}{1}$ cioè che $4 = \frac{4}{1}$.

« Dunque ogni numero intiero ha per naturale denominatore 1 ».

Questo principio è utile in quanto che rende applicabile ai numeri intieri le regole dimostrate per le frazioni.

« Una frazione non cambia di valore quando si moltiplicano i suoi due termini per lo stesso numero ».

Per esempio, moltiplicando i due termini della frazione $\frac{7}{9}$ per 4, essa diventa $\frac{28}{36}$ e non cambia di valore.

Difatti:

L'unità vale 36 trentaseiesimi, $\frac{1}{9}$ d'unità vale dunque la 9.^{na} parte di 36 trentaseiesimi o 4 trentaseiesimi; dunque $\frac{7}{9}$ d'unità valgono 7 volte 4 trentaseiesimi o 28 trentaseiesimi; per conseguenza $\frac{7}{9} = \frac{28}{36}$.

In più brevi termini:

$$\frac{7}{9} = \text{ai } \frac{7}{9} \text{ di } 1 = 7 \text{ volte } \frac{1}{9} \text{ di } \frac{36}{36} = 7 \text{ volte } \frac{4}{36} = \frac{28}{36}.$$

« Una frazione non cambia di valore quando i suoi due termini sono divisi per lo stesso numero ».

Per esempio, dividendo per 4 i due termini della frazione $\frac{12}{20}$ si trova $\frac{12}{20} = \frac{3}{5}$.

Difatti, se l'unità vale 20 ventesimi, $\frac{1}{5}$ d'unità vale la 5.ª parte di 20 ventesimi o 4 ventesimi, dunque $\frac{3}{5}$ d'unità valgono 3 volte 4 ventesimi o 12 ventesimi.

Si ha dunque $\frac{3}{5} = \frac{12}{20}$ o $\frac{12}{20} = \frac{3}{5}$.

I due precedenti ragionamenti ci conducono a ridurre una frazione in un'altra che abbia un denominatore dato.

Per questo bisogna che questo denominatore e quello della frazione proposta siano multipli l'uno dell'altro; altrimenti il problema non si può risolvere che per approssimazione.

Generalmente per cambiare una frazione in un'altra di cui il denominatore è dato, e che sia equivalente alla prima, almeno approssimativamente, bisogna moltiplicare il numeratore di questa prima per il denominatore che si vuole ottenere, dividere il prodotto per il denominatore antico e dare al quoziente il nuovo denominatore.

Per esempio:

Per convertire $\frac{5}{7}$ in ventesimi, si moltiplicherà 5 per 20, si dividerà il prodotto 100 per 7 e si prenderà il quoziente 14 per dei ventesimi, di modo che si avrà:

$$\frac{5}{7} = \frac{14}{20} \text{ o press'a poco.}$$

Difatti, se l'unità vale 20 ventesimi, $\frac{5}{7}$ d'unità o il 7.mo di 5 unità varrà il 7.mo di 5 volte 20 ventesimi, o il 7.mo di 100 ventesimi. Ora, il 7.mo di 100 ventesimi

si ottiene dividendo 100 per 7, esprimendo in ventesimi il quoziente 14 $\frac{2}{7}$, come $\frac{5}{7} = \frac{14}{20} + \frac{2}{7}$ di ventesimi.

E siccome $\frac{2}{7}$ di ventesimi sono meno d'un mezzo ventesimo, ne segue che: $\frac{5}{7} = \frac{14}{20}$ è meno d'un mezzo ventesimo.

Si troverà pure che $\frac{78}{119}$ è tra $\frac{5}{8}$ e $\frac{6}{8}$.

Se vi si dicesse che un pezzo di stoffa ha $\frac{78}{119}$ metri di lunghezza, voi non avreste un'idea ben chiara di questa lunghezza; mentre che l'apprezzereste benissimo se vi si dicesse che essa è tra $\frac{5}{8}$ e $\frac{6}{8}$.

E ad operare tali apprezzamenti giova specialmente la regola precedente.

La stessa regola servirebbe anche a ridurre più frazioni allo stesso denominatore; ma siccome allora non si avrebbe spesso che valori approssimativi, è meglio fare uso delle regole che noi stabiliremo.

Riduzione delle frazioni allo stesso denominatore.

Per ridurre due frazioni allo stesso denominatore, basta moltiplicare i due termini di ciascuna per il denominatore dell'altra.

$$\frac{4}{7} \text{ e } \frac{3}{4} \text{ diventano } \frac{16}{28} \text{ e } \frac{21}{28}$$

Per ridurre allo stesso denominatore quante frazioni si vorrà, bisogna moltiplicare i due termini di ciascuna per il prodotto dei denominatori di tutte le altre.

E così, le frazioni saranno ridotte allo stesso denominatore perchè il nuovo denominatore di ciascuna sarà il prodotto di tutti i denominatori primitivi, e che questo prodotto resta lo stesso in qualunque ordine si molti-

plichi. Oltre a ciò, le frazioni non avranno cambiato di valore perchè i due termini di ciascuna saranno stati moltiplicati per il prodotto dei denominatori di tutte le altre, cioè per uno stesso numero.

Per esempio:

Abbiansi a ridurre allo stesso denominatore le frazioni

$$\frac{2}{3}\ \frac{3}{4}\ \frac{4}{5}\ \text{e}\ \frac{5}{7}$$

Si moltiplicherà i due termini della prima per 140 prodotto dei denominatori 4, 5 e 7 delle altre tre; i due termini della seconda per 105, della terza per 84 e della quarta per 60; E si avrà:

$$\frac{280}{420}\ \frac{315}{420}\ \frac{168}{420}\ \text{e}\ \frac{300}{420}$$

frazioni dello stesso denominatore e rispettivamente uguali alle proposte.

Quando uno dei denominatori proposti è multiplo di tutti gli altri, si può abbreviare l'operazione prendendo questo denominatore moltiplicato per comune denominatore, e moltiplicando il numeratore di ogni frazione per il numero di volte che il suo denominatore è contenuto nel denominatore comune.

Per esempio:

Per ridurre allo stesso denominatore le frazioni:

$$\frac{4}{5}\ \frac{5}{6}\ \frac{7}{10}\ \text{e}\ \frac{11}{30}$$

si osserva che 30 è multiplo di tutti gli altri denominatori, e si prende 30 per denominatore comune delle nuove frazioni.

Si moltiplica quindi il numeratore 4 della prima frazione per 6, numero di volte che il suo denominatore 5 è contenuto in 30, e si ha $\frac{24}{30}$ invece di $\frac{4}{5}$.

Operando nello stesso modo sulle altre frazioni, si vedrà che le proposte frazioni diventano rispettivamente:

$$\frac{24}{30}, \frac{25}{30}, \frac{21}{30} \text{ e } \frac{11}{30}.$$

Prima di tutto le proposte frazioni sono ridotte allo stesso denominatore 30. Oltre a ciò, queste frazioni non hanno cambiato di valore; perchè sostituendo il denominatore multiplo 30 al denominatore 5 della frazione $\frac{4}{5}$ si è moltiplicato questo denominatore per 6, numero di volte che è contenuto in 30; così pure, secondo la regola, si è moltiplicato il numeratore 4 per questo stesso numero di volte 6; dunque i due termini della frazione sono stati moltiplicati per lo stesso numero, e la frazione non ha cambiato di valore.

E nello stesso modo si ragionerà per le altre frazioni.

« Se i denominatori proposti hanno dei fattori comuni senza che l'uno di questi denominatori sia divisibile per tutti gli altri, si può ancora abbreviare la riduzione allo stesso denominatore, basta paragonare fra loro i due denominatori proposti per trovarne il multiplo minimo, quindi prendere questo multiplo per denominatore comune e moltiplicare il numeratore di ogni frazione per il numero di volte che il suo denominatore è contenuto in. questo denominatore comune. »

Per esempio:

Se i denominatori proposti sono 4, 8, 5 e 12, si vedrà immediatamente che il loro multiplo minimo è 120. Ma se si hanno le frazioni:

$$\frac{7}{15}, \frac{11}{21}, \frac{17}{36}, \frac{23}{50} \text{ e } \frac{19}{20}$$

non si potrà trovare il multiplo minimo dei denominatori che scomponendoli in fattori, e si avrà: $15=3\times5$, $21=3\times7$, $36=2\times2\times3\times3$, $56=2\times2\times2\times7$, $20=2\times2\times5$; donde si conchiude che il minimo multiplo cercato è $5\times2\times2\times2\times3\times3\times7$ o 2520.

Prendendo adunque 2520 per comune denominatore; poi facendo la divisione, e sopprimendo col pensiero, nel valore del dividendo i fattori del divisore, ciò che darà $2\times2\times2\times3\times7$ o 168, per il numero di volte che 15 è contenuto in 2520, e così degli altri; moltiplicando infine il numeratore di ogni frazione per il numero di volte che il suo denominatore è contenuto in 2520, si avrà invece delle frazioni proposte, le frazioni seguenti:

$$\frac{1176}{2520},\ \frac{1320}{2520},\ \frac{1190}{2520}\ \text{e}\ \frac{2394}{2590}$$

In tutti i casi della riduzione delle frazioni allo stesso denominatore, si abbrevia l'operazione formando e scrivendo una sol volta il comune denominatore.

È anche bene mettere al disopra di ogni frazione il moltiplicatore de' suoi due termini.

Ecco alcuni esempi á trattare:

$$\frac{5}{6},\ \frac{3}{7},\ \frac{7}{11},\ \frac{4}{5},\ \frac{11}{13};\qquad \frac{11}{12},\ \frac{14}{15},\ \frac{5}{21},\ \frac{13}{53},\ \frac{17}{20},\ \frac{23}{45}$$

Altro Altro

$$\frac{8}{9},\ \frac{2}{3},\ \frac{5}{6},\ \frac{13}{18},\ \frac{17}{36};\qquad \frac{11}{16},\ \frac{17}{24},\ \frac{19}{18},\ \frac{17}{54},\ \frac{19}{60},\ \frac{29}{90}$$

La riduzione allo stesso denominatore giova a paragonare facilmente le frazioni fra di loro.

Per esempio:

Trattandosi di trovare qual è la maggiore delle due frazioni $\frac{8}{11}$ e $\frac{11}{15}$, si ridurranno allo stesso denominatore

e si avrà:

$$\frac{8}{11}=\frac{120}{165} \quad e \quad \frac{11}{15}=\frac{121}{165}$$

donde si vede che la seconda frazione $\frac{11}{15}$ è maggiore dell'altra $\frac{8}{11}$.

Vuolsi sapere per esempio quale frazione $\frac{5}{6}$ è di $\frac{3}{4}$?

La riduzione allo stesso denominatore darà in primo luogo:

$$\frac{5}{6}=\frac{10}{12} \quad e \quad \frac{3}{4}=\frac{9}{12}$$

e siccome 10 è i $\frac{10}{9}$ di 9, così $\frac{10}{12}$ è i $\frac{10}{9}$ di $\frac{9}{12}$, cioè $\frac{5}{6}$ $\frac{10}{9}$ di $\frac{3}{4}$.

Infine, volendosi cercare quante volte 7 ottavi contengono 3 quinti; si ridurrà allo stesso denominatore, e si vedrà che 7 ottavi contengono 3 quinti tante volte quanto 35 quarantesimi contengono 24 quarantesimi, o tante volte quanto 35 contiene 34, cioè $\frac{35}{24}$ di volte.

« Una frazione cambia quando si aggiunge o si sottrae uno stesso numero ai suoi due termini (ineguali). »

Per esempio:

Se ai due termini della frazione $\frac{4}{7}$ si aggiunge lo stesso numero 4, si avrà $\frac{8}{11}$; frazione che non avrà lo stesso valore della prima $\frac{4}{7}$.

Difatti, se si riducono queste due frazioni allo stesso denominatore si avrà: $\frac{4}{7}=\frac{44}{77}$ e $\frac{8}{11}=\frac{56}{77}$, dal quale apparisce chiaro che la seconda frazione $\frac{8}{11}$ è maggiore dell'altra $\frac{4}{7}$.

In generale, quando si aggiunge uno stesso numero ai due termini d'una frazione, il suo valore aumenta o diminuisce di valore, o non cambia, secondo che il numeratore vale meno, o più o egualmente che il denominatore.

Le proprietà contrarie hanno luogo quando si sottrae lo stesso numero dai due termini della frazione. Infine se si moltiplicasse o dividesse i due termini per numeri differenti, il valore cambierebbe, come è facile assicurarsene.

È bene osservare che aumentando il numeratore, si aumenta la frazione; mentre che aumentando il denominatore si diminuisce la frazione; che diminuendo il numeratore si diminuisce la frazione; mentre che diminuendo il denominatore, si aumenta la frazione. Questa si può facilmente dimostrare; e si vedrà che facendo la stessa operazione sui due termini della frazione, essa prova due opposti cambiamenti.

Si è potuto notare che havvi gran differenza tra la forma d'una frazione e il suo valore; imperocchè la forma può variare quanto si vuole moltiplicando o dividendone i due termini per lo stesso numero, mentre il valore resta sempre lo stesso. Nel calcolo delle frazioni è sempre utile il ridurle alla più semplice espressione.

Cioè:

Fare in modo che i due termini di ciascuna siano più piccoli che è possibile senza che questa frazione cambii di valore.

« Per semplificare una frazione bisogna dividere i suoi due termini e quelli della frazione risultante per il seguito dei numeri primi 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ecc. »

Avendo cura di dividere per ciascuno tante volte di seguito che sia possibile.

Per esempio:

Si semplificherà la frazione $\frac{756}{1260}$ dividendo i due termini successivi per 2, 3 e 7, e si avrà:

$$\frac{756}{1260} = \frac{378}{630} = \frac{189}{315} = \frac{63}{105} = \frac{21}{35} = \frac{3}{5}$$

Questo metodo delle divisioni successive ha il vantaggio di poter esser semplificato coi principii della divisibilità stabiliti più sopra.

Difatti:

Nella frazione $\frac{18800}{45120}$ si vede che i due termini sono divisibili per 8 e per 5: sono adunque anche divisibili per 5 volte 8, o per 40, e avremo $\frac{470}{1128}$; dividendo i due termini di questa frazione per 2 avremo $\frac{235}{564}$.

Il numeratore 235 è divisibile per 5 e dà per numero primo al quoziente 47; ma 5 non divide il denominatore 564; e si proverà a dividere questo denominatore per 47. La divisione riesce e dà il quoziente esatto di 12; dunque la frazione proposta si riduce a $\frac{5}{12}$.

Ecco alcune frazioni a semplificare:

$$\frac{10395}{13860}, \frac{32760}{52416}, \frac{317520}{698544}, \frac{7344}{17136} \text{ e } \frac{6912675}{13196925}$$

Si riduce una frazione alla sua più semplice espressione, dividendo i suoi due termini per il loro massimo comun divisore.

Per esempio:

Il m. c. d. dei due termini della frazione $\frac{18800}{45120}$ è 3960; se si dividono questi stessi termini per 3960, la frazione

diventerà $\frac{5}{12}$. Questa nuova frazione è irreducibile perchè i suoi due termini non avendo fattori comuni, non si potrebbe esprimere in una maniera più semplice le quantità che essi rappresentano.

In generale, una frazione è irreducibile quando i suoi due termini sono primi fra di loro.

Per esempio:

Abbiasi la frazione $\frac{16}{15}$ di cui i due termini non hanno divisore comune; il valore di questa frazione non può essere espresso in una maniera più semplice.

Ecco alcuni problemi a risolvere.

1.° Dimostrare che, se si divide l'unità in 4 volte più o 4 volte meno di parti uguali, queste parti saranno 4 volte minori o 4 volte maggiori;

2.° Quale frazione si troverà con 7 ottavi, dividendo ogni ottavo in 5 parti eguali?

3.° Quale frazione si avrebbe con 9 dodicesimi, se si prendessero tre dodicesimi per fare una sola parte?

4.° Quanto si avrà riducendo 3 quarti in parti 8 volte minori, e 16 ventesimi in parti 4 volte più grandi?

5.° Ridurre 7 noni in ventisettesimi, e 30 quarantesimi in quarti.

6.° Quale frazione si prenderà di 20 per aver 12; o in altri termini, quale frazione 12 è di 20?

7.° Quale frazione è 56 di 72 e 6 settimi?

8.° Quale frazione si dovrà prendere di 240 per avere 15 volte il numero di cui i sei quinti valgono i due terzi di 18?

9.° Quale frazione di un quinto è un terzo? un quindicesimo d'un sesto? cinque sesti di dieci noni?

10.° Quale frazione si dovrà prendere di 15 ottavi per aver 5 dodicesimi? di 4 per aver 9 decimi? del quarto e mezzo di 96 per avere 24?

11.° Quanto $\frac{7}{9}$ d'anno valgono di giorni, o di 365.^{mi} d'anno?

12.° Quante volte si deve prendere il 4 per avere due terzi? Quante volte 3 quarti sono in 27 sedicesimi? 2 in 4 quinti?

13.° Ridurre $\frac{17}{16}$ d'ettara in metri quadrati o dieci millesimi di ettara.

14.° Un vaso contiene 18 litri d'acqua e 42 di vino; quanto si dovrà togliere dal miscuglio perchè non vi resti che 15 litri di acqua?

15.° Quanto vino si dovrà aggiungere ad un miscuglio di 12 litri d'acqua e 33 di vino, perchè su 36 litri della nuova mescolanza se ne trovi 8 d'acqua?

16.° Si sono presi 32 litri d'un miscuglio composto di 30 litri d'acqua e 50 di vino; quanto vi è ancora di vino puro?

17.° Se si facessero fondere 24 libbre di sale in 56 libbre d'acqua dolce; quanti grammi di sale vi sarebbero in ogni libbra del miscuglio?

Addizione e sottrazione delle frazioni.

L'addizione e la sottrazione delle frazioni consistono sempre nell'addizione e nella sottrazione dei numeri intieri concreti, riducendole allo stesso denominatore, perocchè le frazioni che hanno lo stesso denominatore non

sono che numeri intieri d'una stessa unità frazionaria.

« Per addizionare fra di loro più frazioni, bisogna prima di tutto ridurle allo stesso denominatore, poi prendere la somma dei nuovi numeratori soltanto e dare al risultato il denominatore comune.

Secondo questa regola, si avrà:

$$\frac{7}{8}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}=\frac{21}{24}+\frac{18}{24}+\frac{20}{24}=\frac{50}{24}=2\frac{11}{24}$$

Bisogna prima di tutto ridurre le frazioni allo stesso denominatore affinchè esse contengano unità frazionarie della stessa specie, perchè non si potrebbero addizionare fra di loro che numeri rappresentanti le stesse unità. Infine, siccome la riduzione delle frazioni allo stesso denominatore non ne cambia punto il valore, ne risulta che la somma delle nuove frazioni è la stessa che quella delle prime.

E siccome 21 giorni + 18 giorni + 20 giorni fanno 59 giorni, così 21 ventiquattresimi + 18 ventiquattresimi + 20 ventiquattresimi fanno 59 ventiquattresimi; $\frac{59}{24}$ è dunque la somma delle tre nuove frazioni; e per conseguenza anche la somma delle tre frazioni proposte.

« Per addizionare fra di loro i numeri frazionari, bisogna fare la somma delle frazioni; estrarre da questa somma le unità che possono contenere, e aggiungere queste unità alla somma dei numeri intieri che accompagnano le frazioni proposte. Secondo questa regola si trova successivamente. »

$$4\frac{5}{6}+3\frac{8}{9}+2\frac{11}{12}=4\frac{30}{36}+3\frac{32}{36}+2\frac{33}{36}=9\frac{95}{36}=11\frac{23}{36}$$

Il risultato 11 $\frac{23}{36}$ è evidentemente la somma dei tre

numeri frazionarii proposti perchè contiene tutte le parti di questi stessi numeri.

« Per fare la sottrazione delle frazioni, bisogna prima di tutto ridurle allo stesso denominatore poi prendere la differenza dei nuovi numeratori e dare al risultato il comune denominatore. »

Così si ottiene successivamente:

$$\frac{17}{18}-\frac{3}{4}=\frac{34}{36}-\frac{27}{36}=\frac{7}{36}$$

(stessa dimostrazione che per l'addizione di frazioni)

« Per fare la sottrazione dei numeri frazionarii bisogna sottrarre le frazioni e quindi i numeri intieri. »

Così:

$$19\,\frac{7}{8}-11\,\frac{2}{3}=19\,\frac{21}{24}-11\,\frac{16}{24}=8\,\frac{5}{24}$$

Questo si fonda sul principio che togliendo da una parte, si toglie dal tutto; e che per sottrarre un tutto bisogna sottrarre ciascuna delle sue parti.

« Se la frazione a sottrarsi è maggiore dell'altra, si aggiungerà a questa un'unità ridotta in parti della stessa specie, e presa sul numero intiero che accompagna questa frazione. »

In questo modo si avrà:

$$8\,\frac{3}{4}-4\,\frac{14}{15}=8\,\frac{9}{15}-4\,\frac{14}{15}=7\,\frac{24}{15}-4\,\frac{14}{15}=3\,\frac{10}{15}=3\,\frac{2}{3}$$

$$6-2\,\frac{3}{4}=5\,\frac{4}{4}-2\,\frac{3}{4}=3\,\frac{1}{4}\text{ e }8\,\frac{7}{8}=7\,\frac{8}{8}-\frac{7}{8}=7\,\frac{1}{8}$$

Quale frazione si dovrà prendere di 6 settimi di 42 per avere $4\,\frac{3}{8}$ di più che i tre quinti della somma delle frazioni 5 quarti, 5 sesti e 5 ottavi? Risposta: 1 sesto.

Un mercante ha venduto 42 metri e 5 sesti su quattro tagli di stoffe, contenenti rispettivamente 20 metri e 2

terzi, 18 metri 7 noni, 12 metri 3 quarti e 8 metri 11 dodicesimi. Quanto vi ha di resto?

Qual numero si dovrà aggiungere ai 54 cinquantacinquesimi della somma delle frazioni 8 noni, 59 sessantesimi, 47 cinquantaquattresimi e 39 quarantesimi per avere $49\frac{2}{3}$ di più dei 5 settimi della differenza dei numeri $41\frac{5}{6}$ e $72\frac{1}{2}$? Risposta: $54\frac{7}{8}$.

Moltiplicazione delle frazioni.

Il prodotto di 9 per 5 è 5 volte 9; è dunque 5 volte il moltiplicando 9, come il moltiplicatore 5 è 5 volte l'unità.

Donde segue:

« Che il prodotto s'ottiene operando sul moltiplicando come il moltiplicatore opera sull'unità. »

Così:

La moltiplicazione è un'operazione per la quale, conoscendo due numeri, chiamati moltiplicando e moltiplicatore, se ne trova un terzo operando sul moltiplicando come si è trovato il moltiplicatore operando sull'unità. Questo terzo numero si chiama prodotto, e tutti i numeri che bisogna moltiplicare fra di loro per avere un prodotto sono i fattori di questo prodotto.

Secondo questa definizione, se il moltiplicatore è 6 settimi o i 6 settimi dell'unità, il prodotto sarà i 6 settimi del moltiplicando; di modo che moltiplicare un numero per 6 settimi è prendere i 6 settimi di questo numero.

In generale:

« Moltiplicare un numero per una frazione, è prenderne questa frazione. »

Così:

Il prodotto di 2 terzi per 7 ottavi si ottiene prendendo i 7 ottavi di 2 terzi. Reciprocamente i:

$$\frac{7}{8} \text{ di } \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \times \frac{7}{8}$$

Nella moltiplicazione delle frazioni, il moltiplicando solo può essere una frazione, o il moltiplicatore solo, o infine i due fattori che possono anche essere frazionari, l'uno o l'altro o tutti e due.

« Per moltiplicare una frazione per un numero intiero, bisogna moltiplicare il numeratore per il numero intiero, ovvero, se è possibile, dividere il denominatore per lo stesso numero intiero. »

Secondo questa regola si avrà:

$$\frac{8}{7} \times 4 = \frac{32}{7} \text{ e } \frac{11}{24} \times 4 = \frac{11}{6}$$

Difatti:

Moltiplicare $\frac{8}{7}$ per 4, è ripetere $\frac{8}{7}$ 4 volte; ora 4 volte 8 fanno 32; dunque 4 volte $\frac{8}{7}$ fanno $\frac{32}{7}$, si ha dunque effettivamente: $\frac{8}{7} \times 4 = \frac{32}{7}$.

Così pure:

$$\frac{11}{24} \times 4 = 4 \text{ volte } \frac{11}{24} = \frac{44}{24} = \frac{11}{6}$$

come applicando la regola proposta.

Per moltiplicare un numero intiero per una frazione bisogna moltiplicare questo numero intiero per il numeratore e dare al risultato il denominatore della frazione; ovvero, se è possibile, bisogna dividere il numero intiero per il denominatore, e moltiplicare il risultato per il numeratore della stessa frazione.

E così si avrà:

$$4 \times \frac{8}{11} = \frac{32}{11} \text{ e } 18 \times \frac{5}{6} = 15.$$

Difatti moltiplicare 4 per $\frac{8}{11}$ è prendere gli $\frac{8}{11}$ di 4. Ora l'11.^{mo} di 4 è $\frac{4}{11}$; gli $\frac{8}{11}$ di 4 sono dunque 8 volte $\frac{4}{11}$, o $\frac{32}{11}$. Di modo che $4 \times \frac{8}{11} = \frac{32}{11}$.

E così pure $18 \times \frac{5}{6} =$ ai $\frac{5}{6}$ di $18 = 5$ volte $\frac{1}{6}$ di $18 = 5$ volte $3 = 15$, come applicando la regola.

« Per moltiplicare una frazione per una frazione, bisogna moltiplicare numeratore per numeratore e denominatore per denominatore ».

Applicando successivamente la regola precedente e osservando che ogni numero intiero ha naturalmente per denominatore 1, si vedrà che per aver il prodotto di quante frazioni si vorrà, bisogna moltiplicare fra di loro i numeratori e fra di loro i denominatori.

Così si avrà:

$$\frac{3}{5} \times 4 \times \frac{5}{16} = \frac{60}{80} = \frac{3}{4}.$$

« Per moltiplicare un numero frazionario per un altro numero frazionario, basta ridurli ciascuno ad una sola frazione e moltiplicare fra di loro le frazioni risultanti ».

Secondo questa regola, si avrà:

$$4\frac{5}{6} \times 3\frac{2}{5} = \frac{29}{6} \times \frac{17}{5} = \frac{49}{30}3 = 3\;16\frac{13}{30}$$

Difatti, riducendo ogni numero frazionario ad una sola frazione non se ne cambia il valore; dunque il prodotto di due frazioni risultanti è lo stesso che quello dei numeri frazionarii proposti.

Si potrebbe anche moltiplicare l'intiero e la frazione del moltiplicando, successivamente per l'intiero e la frazione

del moltiplicatore, ma il procedimento sarebbe troppo lungo.

La moltiplicazione delle frazioni conduce alle frazioni di frazioni.

Si chiamano *frazioni di frazioni*, una o più parti di altre frazioni, o un seguito di frazioni, di cui ciascuna è frazione di quella che immediatamente le tien dietro, come i 2 terzi di 3 quarti di 7 ottavi di 10.

Si sa che $4 \times \frac{3}{7} =$ ai $\frac{3}{7}$ di 4, dunque reciprocamente i $\frac{3}{7}$ di $4 = 4 \times \frac{3}{7}$.

Cioè:

Che per prendere una frazione d'un numero dato, basta moltiplicare questo numero per questa frazione.

In generale:

Per valutare le frazioni di frazioni bisogna fare il prodotto dei numeratori e quello dei denominatori.

Per esempio:

I $\frac{3}{4}$ degli $\frac{8}{9}$ dei $\frac{6}{7}$ di $21 = \frac{21 \times 6 \times 8 \times 3}{7 \times 9 \times 4} = \frac{3024}{252} = 12$

Difatti:

I 6 settimi di 21 valgono 18, gli 8 noni di 18 valgono 16 e i 3 quarti di 16 valgono 12; dunque i 3 quarti degli 8 noni dei 6 settimi di 21 fanno 12.

Quando il moltiplicatore è minore dell'unità, il prodotto è minore del moltiplicando. Perocchè il prodotto non vale una volta il moltiplicando, dunque è minore.

Così:

Moltiplicare non è sempre aumentare; è d'altronde facile vedere che il prodotto vale più, altrettanto, o meno

del moltiplicando, secondo che il moltiplicatore vale più, altrettanto o meno dell'unità.

« Una frazione diventa un certo numero di volte maggiore o minore, secondo che la quantità alla quale si riferisce diventa lo stesso numero di volte maggiore o minore.

Ciò è evidente, imperocchè, per esempio:

$$4\ \frac{3}{8} \text{ di } 5 = 5 \times \frac{3}{8} = \frac{15}{8} = 5 \text{ volte } \frac{3}{8} = 5 \text{ volte } \frac{3}{8} \text{ di } 1.$$

Il prodotto di due fattori resta lo stesso, in qualunque modo lo si moltiplichi.

Questo principio, dimostrato per i numeri interi, è vero anche per le frazioni.

Difatti, è visibile che si ha $\frac{5}{7} \times 9 = \frac{5 \times 9}{7} = \frac{9 \times 5}{7} = 9 \times \frac{5}{7}$

e $\frac{3}{4} \times \frac{8}{9} = \frac{3 \times 8}{4 \times 9} = \frac{8 \times 3}{9 \times 4} = \frac{8}{9} \times \frac{3}{4}$.

In generale:

Se si moltiplica il primo numero per il secondo e il secondo pel primo, i termini dei due prodotti saranno composti degli stessi fattori; dunque saranno gli stessi che questi due prodotti.

Un prodotto di tanti fattori che si vorrà, intieri o frazionari, non cambia di valore, qualunque sia l'ordine nel quale è moltiplicato.

Questo principio è già dimostrato per i numeri interi.

Riguardo alle frazioni dico, per esempio, che:

$$\frac{4}{5} \times 3 \times \frac{7}{8} \times \frac{9}{10} = \frac{4}{5} \times \frac{9}{10} \times \frac{7}{8} \times 3.$$

Difatti, secondo ciò che abbiamo più sopra detto, questi due prodotti si riducono alle due frazioni.

$$\frac{4 \times 3 \times 7 \times 9}{5 \times 8 \times 10} \quad \text{e} \quad \frac{4 \times 9 \times 7 \times 3}{5 \times 10 \times 18}$$

Ora i due termini della prima di queste due frazioni sono rispettivamente eguali ai due termini della seconda come aventi gli stessi fattori; dunque le due frazioni sono esse pure eguali, e i prodotti rappresentati da queste due frazioni sono parimenti eguali.

Si moltiplica un numero per il prodotto di più fattori, moltiplicando questo numero per il primo fattore, il risultato per il secondo fattore, e così di seguito.

Difatti, come si è visto, si ha:

$$\frac{4}{5} \times \left(\frac{3}{7} \times \frac{8}{9}\right) = \frac{3}{7} \times \frac{8}{9} \times \frac{4}{5} = \frac{4}{5} \times \frac{3}{7} \times \frac{8}{9}$$

Di qui è facile dimostrare che, qualunque siano i fattori impiegati.

1.° Si moltiplica un prodotto, moltiplicando uno dei suoi due fattori;

2.° Si moltiplica per più prodotti, moltiplicando successivamente per i fattori di questi prodotti.

Della Divisione di Frazioni.

Abbiamo veduto che dividendo il prodotto di due numeri intieri per uno de'suoi fattori, si ottiene l'altro per quoziente. Lo stesso avviene per il prodotto di due numeri qualunque, e per conseguenza noi diremo che la divisione è un'operazione per la quale, conoscendo un prodotto chiamato dividendo e uno de'suoi due fattori detto divisore si trova l'altro detto quoziente.

Da ciò segue che *il dividendo è il prodotto del quoziente pel divisore;* e per conseguenza, se il divisore è l'unità, il quoziente sarà eguale al dividendo.

« Il quoziente si trova sempre moltiplicando il dividendo per il divisore rovesciato ».

Difatti, 1.° Se il divisore è 9, il dividendo sarà il prodotto del quoziente per 9; dunque 9 volte il quoziente darà il dividendo; il quoziente è dunque il 9.^{mo} del dividendo, o il prodotto del dividendo per $\frac{1}{9}$, cioè per il divisore $\frac{9}{1}$ rovesciato. 2.° Se il divisore è $\frac{8}{11}$ il dividendo sarà il prodotto del quoziente per $\frac{8}{11}$; dunque gli $\frac{8}{11}$ del quoziente valgono il dividendo; $\frac{1}{11}$ del quoziente vale dunque l'8° del dividendo, e il quoziente totale vale 11 volte l'8° del dividendo, o gli $\frac{11}{8}$ del dividendo; per conseguenza il prodotto del dividendo per $\frac{11}{8}$, cioè per la frazione $\frac{8}{11}$ rovesciata.

Secondo questo principio è evidente che si avrà successivamente:

$$4 : 7 = 4 \times \frac{1}{7} = \frac{4}{7}; \quad \frac{28}{9} : 4 = \frac{28}{9} \times \frac{1}{4} = \frac{28}{36} = \frac{7}{9}$$

$$12 : \frac{4}{5} = 12 \times \frac{5}{4} = 15; \quad 7 : \frac{8}{5} = 7 \times \frac{5}{8} = \frac{35}{8}$$

$$\frac{4}{5} : \frac{3}{7} = \frac{4}{5} \times \frac{7}{3} = \frac{28}{15};$$

$$4\,\frac{2}{3} : 3\,\frac{4}{5} = \frac{14}{3} : \frac{19}{5} = \frac{14}{3} \times \frac{15}{19} = \frac{70}{57}.$$

Si vede che il principio precedente condurrà sempre al quoziente di due numeri qualunque. Ma sovente si arriva più semplicemente al risultato osservando le regole seguenti.

« Il quoziente di due numeri interi è una frazione avente il dividendo per numeratore e il divisore per denominatore ».

Per esempio: $11 : 6 = \frac{11}{6}$.

Difatti, il dividendo essendo il prodotto del quoziente per il divisore 6, ne segue che 6 volte il quoziente dà 11; il quoziente solo è dunque la 6.ª parte di 11, o $\frac{16}{6}$. Di modo che la divisione di 11 per 6 si indica anche scrivendo $\frac{11}{6}$.

Reciprocamente, ogni frazione rappresenta il quoziente del suo numeratore per il suo denominatore.

Imperocchè, se $8 : 9 = \frac{8}{9}$, reciprocamente $\frac{8}{9} = 8 : 9$. Di modo che $\frac{8}{9}$ si può anche enunciare 8 diviso per 9; e questo secondo modo è ugualmente usato.

Per dividere una frazione per un numero intiero, bisogna moltiplicare il denominatore per il numero intiero; ovvero, se è possibile, dividere il numeratore per lo stesso numero intero.

Questa regola dà immediatamente:

$$\frac{5}{7} : 4 = \frac{5}{28} \text{ e } \frac{20}{11} : 4 = \frac{5}{11}.$$

Difatti, nel primo esempio, il dividendo $\frac{5}{7}$ è il prodotto del quoziente pel divisore 4, dunque 4 volte il quoziente dà $\frac{5}{7}$; il quoziente solo è dunque il quarto di $\frac{5}{7}$ o $\frac{5}{28}$. Si dimostrerà parimente che il quoziente di $\frac{20}{11}$ per 4 è $\frac{5}{11}$ come applicando la regola.

Per dividere un numero qualunque per una frazione, bisogna dividere questo numero per il denominatore e moltiplicare il risultato per il denominatore della frazione. Così si avrà immediatamente:

$$18 : \frac{3}{7} = 42,\ 3 : \frac{6}{5} = \frac{5}{2}, = \frac{12}{11} : \frac{3}{4} \frac{16}{11} \text{e} \frac{8}{15} : \frac{2}{5} = \frac{4}{3}$$

Difatti, nel primo esempio il dividendo 18 è il pro-

dotto del quoziente per il divisore $\frac{3}{7}$, e ne vale i $\frac{3}{7}$; dunque i $\frac{3}{4}$ del quoziente valgono 18; $\frac{1}{7}$ del quoziente vale dunque il terzo 18, o 6; il quoziente vale per conseguenza 7 volte 6 o 42....

Si dimostrerà parimenti l'esattezza delle tre altre questioni: $\frac{5}{2}$, $\frac{16}{11}$, $\frac{4}{3}$.

« Quando i due termini della frazione dividendo sono rispettivamente divisibili per i due termini della frazione divisore, basta effettuare queste due divisioni. »

Così: $\frac{15}{32} : \frac{5}{8} = \frac{3}{4}$, come facilmente si verifica col ragionamento precedente.

« Quando il dividendo e il divisore hanno lo stesso denominatore, si può sopprimere questo denominatore o sostituirne un altro senza alterare il valore numerico del quoziente. »

Per esempio: $\frac{8}{9} : \frac{11}{9} = 8 : 11 = \frac{8}{7} : \frac{11}{7}$.

Si dimostra in fatti, che ognuno di questi quozienti si riduce a $\frac{8}{11}$.

« Per dividere un numero frazionario per un altro numero frazionario, bisogna ridurli ciascuno ad una sola frazione, e dividere una per l'altra le due frazioni risultanti. » Così si avrà:

$4\frac{3}{5} : \frac{7}{8} = \frac{23}{5} : \frac{7}{8} = \frac{184}{35}$ e $5\frac{3}{4} : 7\frac{2}{3} = \frac{23}{4} : \frac{23}{3} = \frac{3}{4}$

« Quando il divisore è minore dell'unità, il quoziente è maggiore del dividendo. »

Imperocchè; se il divisore è $\frac{4}{9}$ per esempio, il dividendo sarà il prodotto del quoziente per $\frac{4}{9}$ e non ne

vale che i $\frac{4}{9}$; il dividendo sarà dunque minore del quoziente, e il quoziente maggiore del dividendo.

Così, *dividere non è sempre diminuire.* È facile dunque vedere che, secondo che il divisore vale più altrettanto o meno dell'unità, il quoziente vale meno, altrettanto o più del dividendo.

« La divisione delle frazioni porge ancora altre importantissime conseguenze, che esamineremo. »

Si divide un prodotto dividendo uno de' suoi fattori.

Difatti, sia il prodotto $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{7}{9}$ e dividiamo il suo primo fattore per $\frac{5}{6}$.

Avremo successivamente:

$$\left(\frac{2}{3} : \frac{5}{6}\right) \times \frac{4}{5} \times \frac{7}{9} = \frac{2}{3} \times \frac{6}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{7}{9} : \frac{5}{6};$$

dunque il nuovo prodotto si riduce al primo diviso per $\frac{5}{6}$.

« Si moltiplica un quoziente moltiplicando il suo dividendo. »

Difatti, sia il quoziente $4 : \frac{5}{6}$ e moltiplichiamo il suo dividendo per $\frac{7}{8}$; noi avremo evidentemente:

$$4 \times \frac{7}{8} : \frac{5}{6} = 4 \times \frac{7}{8} \times \frac{6}{5} = 4 \times \frac{6}{5} \times \frac{7}{8} = \left(4 : \frac{5}{6}\right) \times \frac{7}{8}$$

Così il nuovo quoziente è diverso del primo moltiplicato per $\frac{7}{8}$.

Si vede d'altronde che il numero risultante d'una moltiplicazione e d'una divisione non cambia di valore in qualunque ordine si effettui queste due operazioni.

Si moltiplica un quoziente dividendo il suo divisore.

Sia il quoziente $\frac{7}{9} : \frac{8}{11}$ e sia diviso il suo divisore per

$\frac{3}{4}$; si avrà:

$$\frac{7}{9} : \left(\frac{8}{11} : \frac{3}{4}\right) = \frac{7}{9} : \frac{8 \times 4}{4 \times 3} = \frac{7}{9} \times \frac{11 \times 3}{8 \times 4}$$

$$\frac{7}{9} \times \frac{11}{8} \times \frac{3}{4} = \left(\frac{7}{9} : \frac{8}{11}\right) \times \frac{3}{4};$$

dunque il nuovo quoziente è uguale al primo moltiplicato per $\frac{3}{4}$.

« Un quoziente non cambia di valore quando si moltiplica o si divide il dividendo e il divisore per uno stesso numero. «

Difatti, moltiplicando il dividendo e il divisore per uno stesso numero si moltiplica e si divide il quoziente per questo numero; una di queste due operazioni distrugge adunque l'effetto dell'altra, e il quoziente non cambia di valore. Parimenti quando si divide il divisore e il dividendo per uno stesso numero, si divide e si moltiplica il quoziente per questo numero; e il quoziente non cambia di valore.

Da quanto si è detto, apparisce chiaro che i quozienti hanno le medesime proprietà delle frazioni; e facilmente si può verificare che per ridurre più quozienti allo stesso divisore; per addizionare, sottrarre, moltiplicare o dividere fra loro più quozienti dati, bisogna seguire regole assolutamente eguali a quelle che si osservano per effettuare le stesse operazioni sulle frazioni. Di modo che il calcolo dei quozienti è affatto uguale a quello delle frazioni ordinarie.

Per esempio, si vedrà facilmente che:

$$\frac{7}{9} : \frac{3}{4} - \frac{4}{11} : \frac{2}{3} = \frac{14}{27} : \frac{1}{2} = \left(\frac{14}{27} - \frac{3}{11}\right) : \frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{3}{4} : \frac{2}{3}\right) \times \left(\frac{4}{5} : \frac{9}{8}\right) = \left(\frac{3}{4} = \frac{4}{5}\right) : \left(\frac{2}{3} \times \frac{9}{8}\right)$$

$$\left(\frac{7}{11} : \frac{2}{3}\right) : \left(\frac{8}{11} : \frac{4}{5}\right) = \left(\frac{7}{11} : \frac{2}{3}\right) \times \left(\frac{4}{5} : \frac{8}{11}\right)$$

e così delle altre operazioni sui quozienti.

Alcune applicazioni del calcolo sui quozienti.

1.° Un operaio guadagna 2 terzi di lira in 5 sesti di giorno; quanti giorni impiegherà a guadagnare 12 lire?

Se per guadagnare $\frac{2}{3}$ di lira impiega $\frac{5}{6}$ di giorni, per guadagnare 1 lira o i $\frac{3}{2}$ di $\frac{2}{3}$ di lira impiegherà i $\frac{3}{2}$ di $\frac{5}{6}$ di giorno, o . . . $\frac{5}{4}$ di giorno, dunque per guadagnare 12 lire, impiegherà 12 volte $\frac{5}{4}$ di giorno, o 15 giorni.

Altrimenti:

Se si moltiplicasse il guadagno di un giorno per $\frac{5}{6}$, si avrebbe il guadagno di $\frac{5}{6}$ di giorno; si avrebbe adunque $\frac{2}{3}$ di lira; per conseguenza il guadagno d'un giorno $= \frac{2}{3} : \frac{5}{6}$.

Ma il guadagno 12 lire essendo il prodotto del guadagno d'un giorno per il numero di giorni cercato, ne segue che questo numero di giorni è $12 : \left(\frac{2}{3} : \frac{5}{6}\right)$ o 15 come più sopra.

Quando non si ha che dei moltipli o delle frazioni del numero incognito a combinare fra di loro, si facilita la soluzione rappresentando con 1 questo numero incognito, come si vedrà nei problemi che seguono.

2.° La metà della spesa d'una persona che aveva 50 lire vale i 3 quarti di ciò che le resta; qual è questa spesa?

Sia 1 la spesa cercata; la sua metà sarà $\frac{1}{2}$. Così i $\frac{3}{4}$ di ciò che resta ancora vale $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$ vale dunque il 3 di $\frac{1}{2}$ o $\frac{1}{6}$; e ciò che resta ancora vale 4 volte $\frac{1}{6}$ o $\frac{4}{6}$ o $\frac{2}{3}$. Gli è chiaro che la persona possedeva prima la spesa 1 più il resto $\frac{2}{3}$ o $\frac{5}{3}$, cioè i $\frac{5}{3}$ della spesa 1; e siccome questa persona possedeva 50 lire; i $\frac{5}{3}$ della spesa valgono lire 50; $\frac{1}{3}$ vale dunque il 5.° di 50 lire, o 10 lire; e la spesa vale per conseguenza 3 volte 10 lire, o 30 lire. E, difatti, la metà 15 di questa spesa vale i $\frac{3}{4}$ del resto, 50 — 30, cioè i $\frac{3}{4}$ di 20.

3.° Uno zio lascia 66800 lire a cinque nipoti che hanno rispettivamente 36, 30, 24, 16 e 15 anni. Essi devono dividersi questa somma colla condizione che se uno ha un certo numero d'anni più di un altro riceverà lo stesso numero di volte meno. Quanto avrà ciascuno?

Si è notato che la moltiplicazione delle frazioni rende assolutamente inutile la loro divisione nella soluzione del problema; ma questa divisione non è perciò di uso meno frequente, come si vedrà in seguito.

Ecco, per concludere, alcune questioni proposte per servire d'applicazione al calcolo delle frazioni.

1.° Si prende il terzo di una somma, poi i 2 quinti del resto, e allora resta 29. Qual era questa somma? Risposta: 72 $\frac{1}{2}$.

2.° Sopra mele pagate 2 centesimi ogni 5, e rivendute 3 centesimi ogni 4 si è guadagnato 75 centesimi. Quante erano le mele?

3.° Quanti litri di vino si avrà per lire 5,5, se 3 litri e 2 terzi costavano lire 8 e $^4/_5$?

4.° Dividere 720 in quattro parti A, B, C, D, in modo che dividendole rispettivamente per 12, 9, 6, 3, i quozienti siano eguali. Quali sono queste parti? Risposta: 287, 216, 144 e 72.

5.° Tre quarti d'un metro di stoffa costano 45 lire. Quanto costeranno 4 metri e 5 sesti? Risposta: 290 lire.

6.° Cinque sesti di litro di vino costano 6 lire e 2 terzi. Quanto si pagherà per il resto d'una botte che conteneva 245 litri e 3 quarti, e dal quale si è levato 148 litri e 7 ottavi? Risposta: 775.

7.° Qual è il numero di cui la metà e i 3 quarti, più 6, fanno 36? Risposta: 24.

8.° Per qual numero si dovrà dividere 2 noni, perchè il quoziente sia il terzo di 6 quinti di 28 $\frac{4}{2}$? Risposta: per $\frac{7}{360}$.

9.° In un'impresa ho guadagnato i 3 quattordicesimi della somma che ho esposta, le spese sono il sedicesimo di questa somma, e ho ritirato in tutto 4450 lire e $\frac{1}{2}$ Qual somma ho esposto? Risposta: 3864 lire.

10.° Quanti metri di tela larga 5 sesti abbisognerebbero per foderare 420 metri d'una stoffa larga 7 ottavi? Risposta: 441.

11.° Ciò che resta del giorno è il quinto del numero di ore trascorse. Che ora è? Risposta: 8 ore di sera.

12.° Una persona avendo speso il quarto del suo denaro, guadagna in seguito i 2 terzi del resto e possiede 30 lire. Quanto aveva? Risposta: 24 lire.

13.° Una persona perde 3 quarti del suo denaro, e guadagna in seguito i 3 quinti del resto; siccome essa possiede allora 60 lire di meno, si domanda quanto aveva prima? Risposta: 100 lire.

14.° Prendendo il quarto, il sesto, l'ottavo e il dodicesimo d'un numero, ne resta il terzo più 3. Quale è questo numero? Risposta: 72.

15.° Si divide una somma di denaro a quattro persone, dando a ciascuna i 2 terzi di ciò che riceve la precedente, e il quarto ha 320 lire di meno della terza. Qual è la parte di ciascuna? Risposta: la prima ha 2160 lire, ecc.

16.° Si hanno 36 metri e $\frac{3}{4}$ di tela di 5 dodicesimi di larghezza, di cui se ne prende tanta da soppannare un mantello contenente 8 metri e 3 quarti di panno largo 7 quarti; quanta tela resterà e quanto costerà il mantello, sapendosi che il panno costa lire 30 e la fodera lire 44 il metro, e che il sarto ha preso lire 20 di fattura? Risposta: Non resterà più tela, e il mantello costerà lire 429 $\frac{1}{2}$.

17.° Tre operai devono fare 548 metri di lavoro colla condizione che, dopo un certo tempo, quello che avrà fatto 2, 3, 4 volte più d'un altro, non avrà più a fare

che 2, 3, 4 volte meno di esso. All'epoca fissata, il primo ha fatto 48 metri, il secondo 40 e il terzo 36. Quanto avrà ancora a fare ciascuno del lavoro proposto? Risposta: il primo farà ancora metri 120, ecc.

18.° D'un miscuglio contenente 60 litri d'un vino da 8 centesimi, e 48 d'un vino a 60, si è tolto un numero di litri tale che il resto costa ancora 5160 centesimi. Quanti litri di ciascuna qualità di vino evvi ancora? Risposta: 45 litri del primo e 36 del secondo.